

К задаче гарантированной численной локализации спектров операторов*

3 марта 2008 г.

Аннотация

Рассмотрены технологические аспекты решения задачи численной локализации спектров конечномерных операторов, базирующейся на понятии их спектральных портретов (псевдоспектров). Указаны условия с достаточностью обеспечивающие вложение псевдоспектров двух близких по норме операторов. Представлены примеры, подтверждающие целесообразность использования полученных условий для решения практических задач.

Локализация спектров конечномерных операторов в заданной области поля комплексных чисел – фундаментальная проблема, возникающая во многих прикладных задачах вычислительной математики. Техническим препятствием на пути решения этой задачи является необходимость ее погружения в среду с конечной точностью вычислений, нередко искажающую реальную спектральную картину. Другая важная особенность этих задач состоит в том, что на практике, как правило, оператор, подлежащий анализу, известен лишь с некоторой точностью, что также вносит определенную сложность. Для избежания этих трудностей, обусловленных чувствительностью спектра оператора к возмущениям, переходят к анализу их ε -спектров (псевдоспектров) или, как их предложил называть С.К. Годунов [1], – спектральных портретов.

В настоящее время концепция спектральных портретов операторов является общим подходом, повсеместно используемым в вычислительной линейной алгебре. Однако, несмотря на огромное число публикаций, посвященных данной тематике, нередко в прикладных исследованиях, вопросу, связанному с гарантированной локализацией спектральных портретов операторов, не уделяется должного внимания. А именно, заключения, сделанные на основе анализа псевдоспектра образа истинного оператора в среде вычислений, отождествляются со свойствами истинного невозмущенного (как правило, неизвестного) оператора. В то время как их ε -спектры, соответствующие одному и тому же значению ε , могут, вообще говоря, находиться в различных множественных отношениях друг с другом, – взаимовключения, пересечения и взаимоисключения. Наличие подобной неопределенности явно противоречит концепции надежных вычислений. В связи с этим целью настоящей работы является анализ данной ситуации и установление условий, обеспечивающих заданное множественное отношение спектральных портретов истинного оператора и его известного образа в вычислительной среде.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке

Далее в изложении будем придерживаться следующих обозначений. Под оператором F будем понимать невозмущенный (неизвестный) оператор, в отношении псевдоспектра которого предстоит строить гарантирующие заключения; \tilde{F} – доступное для анализа приближение F ; Ω – область локализации псевдоспектра для которой требуется установить содержится ли в ней данный спектральный портрет F , или указать условия при которых это возможно.

Теоретическая часть

Напомним, что необходимым и достаточным условием того, что комплексное значение λ принадлежит ε -спектру ($\lambda \in \Lambda_\varepsilon(F)$), является выполнение условия [2]:

$$\|(\lambda I - F)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon \|F\|}, \varepsilon > 0, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ – произвольная матричная норма.

Введем следующую модель возмущений, описывающую соотношение операторов F и \tilde{F} :

$$\|\tilde{F} - F\| \leq \gamma \|F\| \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} \|\tilde{F}\|, 0 \leq \gamma < 1, \quad (2)$$

которую преобразуем к виду:

$$\frac{1}{1 + \gamma} \|\tilde{F}\| \leq \|F\| \leq \frac{1}{1 - \gamma} \|\tilde{F}\|. \quad (3)$$

Выбрав ε и $\tilde{\varepsilon}$ – величины относительных возмущений, участвующие при построении $\Lambda_\varepsilon(F)$ и $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$, установим условия, накладываемые на характеристики возмущений ε , $\tilde{\varepsilon}$ и γ , обеспечивающие заданное множественное отношение обозначенных псевдоспектров, а именно, – включение $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$. Такая постановка связана, например, с задачей гарантированной численной оценки устойчивости стационарных линейных динамических систем, когда погружение результата аналитического конструирования системы в среду вычислений происходит с конечной точностью, что неизбежно приводит к возмущению ее – системы – оператора. В этом случае на основе известной оценки погрешности погружения оператора (γ) и некоторого, экспериментально полученного значения $\tilde{\varepsilon}$, обеспечивающего включение $\tilde{\varepsilon}$ -спектра оператора \tilde{F} в область устойчивости, требуется определить значение ε , гарантирующее включение в область устойчивости ε -спектра неизвестного оператора F .

Возвращаясь к вопросу об условиях вложенности псевдоспектров, рассмотрим множества $\Lambda_\varepsilon(F)$ и $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$. С учетом модели (2), ограничиваясь случаем спектральной операторной нормы, придем к следующему предложению о вложенности псевдоспектров точного ($\Lambda_\varepsilon(F)$) и возмущенного операторов ($\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$) [3]:

Предложение 1. Пусть F и \tilde{F} соответственно точный и возмущенный операторы, удовлетворяющие неравенству (2) ($\|\cdot\|$ – спектральная норма). Тогда, если

$$\tilde{\varepsilon} \geq \frac{\gamma + \varepsilon}{1 - \gamma}, \quad (4)$$

то ε -спектр невозмущенного оператора F целиком содержится в $\tilde{\varepsilon}$ -спектре оператора \tilde{F} .

Доказательство данного предложения может быть проведено основываясь на сингулярной интерпретации определения псевдоспектра, ассоциированного со спектральной операторной нормой. Действительно, рассматривая неравенство, являющееся следствием теоремы об устойчивости сингулярных чисел к возмущениям [2], –

$$\sigma_j(\lambda I - \tilde{F}) - \frac{\gamma}{1 - \gamma} \|\tilde{F}\| \leq \sigma_j(\lambda I - F) \leq \sigma_j(\lambda I - \tilde{F}) + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \|\tilde{F}\|, j = \overline{1, n},$$

где $\sigma_j(\cdot)$ – j -е сингулярное число линейного оператора в скобках;

и используя неравенства (1), (3), придем к следующему расширенному соотношению:

$$\frac{1 - \gamma}{(1 - \gamma) \cdot \sigma_{\min}(\lambda I - \tilde{F}) - \gamma \|\tilde{F}\|} \geq \frac{1}{\sigma_{\min}(\lambda I - F)} \geq \frac{1}{\varepsilon \|F\|} \geq \frac{1 - \gamma}{\varepsilon \|\tilde{F}\|},$$

откуда после элементарных преобразований

$$\|(\lambda I - \tilde{F})^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_{\min}(\lambda I - \tilde{F})} \geq \frac{1 - \gamma}{(\varepsilon + \gamma) \|\tilde{F}\|},$$

из чего и следует (4).

Необходимо отметить, что представленное алгебраическое доказательство достаточных условий вложенности спектральных портретов возмущенного и точного операторов маскирует более общий результат, опирающийся на свойство вложенности ε -решений, в частности, справедливое для псевдоспектров $(\Lambda_\alpha(\cdot) \subseteq \Lambda_\beta(\cdot), \alpha \leq \beta)$. А именно, имеет место следующее утверждение:

Предложение 2. Пусть X метрическое пространство, на котором задано отображение $\Upsilon : X \rightarrow Y$, где Y – произвольное множество. Определим множества $L_\alpha(x), L_\beta(y) \subseteq Y$: $L_\alpha(x) = \{\Upsilon(z) : \rho(x, z) \leq \alpha\}$ и $L_\beta(y) = \{\Upsilon(z) : \rho(y, z) \leq \beta\}$, $\rho(\cdot, \cdot)$ – метрика в пространстве X . Если $\rho(x, y) \leq \gamma$ и $\beta \geq \gamma + \alpha$, то $L_\alpha(x) \subseteq L_\beta(y)$.

Доказательство данного утверждения является тривиальной интерпретацией неравенства треугольника, справедливого для элементов метрических пространств.

Условие (4) легко получается из предложения 2 если в качестве метрического пространства X принять линейное нормированное пространство квадратных матриц заданной размерности, а за отображение Υ принять алгоритм, ставящий в соответствие данной матрице ее спектр. Таким образом, соотношение (4) становится универсальным – справедливым не только для спектральной матричной нормы.

Полученное достаточное условие (4) позволяет решать задачи локализации спектральных портретов операторов, известных лишь с некоторой точностью, предопределяемой моделями рассматриваемого здесь типа (2).

Пусть для невозмущенного оператора F исследуется вопрос о локализации его спектра в заданной области Ω . Тогда, в свете изложенного, может быть предложена следующая процедура решения такой задачи. Обозначим $\tilde{\varepsilon}_0$ – максимально допустимое значение относительных возмущений оператора \tilde{F} при которых начинается выход его псевдоспектра из области Ω . Если при текущих значениях γ и $\tilde{\varepsilon}_0$ существует положительное значение ε_0 , удовлетворяющее соотношению (4), то это означает вложенность ε_0 -спектра F в $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр возмущенного оператора \tilde{F} , что в свою очередь влечет $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$. Таким образом, условие, гарантирующее существование вложенного псевдоспектра невозмущенного оператора, – это наличие при заданных $\gamma, \tilde{\varepsilon}$ положительного ε удовлетворяющего (4). Сказанное можно представить в виде следствия сформулированных предложений:

Следствие 1. Если $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр возмущенного оператора \tilde{F} целиком содержится в области Ω , причем $\exists P : P \in \partial\tilde{\Lambda}_{\tilde{\varepsilon}_0}(\tilde{F})$ и $P \in \partial\Omega$ ($\partial(\cdot)$ – граница области), то при выполнении

$$\gamma < \gamma^* = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 + \tilde{\varepsilon}_0} \quad (5)$$

существует ненулевой ε_0 -спектр ($\varepsilon_0 > 0$) оператора F целиком содержащийся в $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектре \tilde{F} , причем

$$\varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}_0(1 - \gamma) - \gamma. \quad (6)$$

Заметим, что случай $\gamma \geq \gamma^*$ исключает (в рамках изложенного) возможность гарантирующих заключений о принадлежности спектра F заданной области Ω и требует, вообще говоря, проведения дополнительного исследования.

Значение ε_0 , найденное согласно (6), – максимально допустимый уровень относительных возмущений оператора F , с достаточностью не выводящих его спектр из области Ω .

Таким образом, следствие 1 представляет собой формально строгий конструктивный алгоритм оценки близости спектра оператора (F) к границе заданной области (Ω) на основе анализа его образа (\tilde{F}) в среде вычислений.

Интересно отметить тесную взаимосвязь изложенного с достаточными условиями разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Такого рода задача может возникать, например, при анализе наблюдаемости (управляемости) линейных динамических систем, когда требуется установить существование и единственность решения специально сформированной СЛАУ [6]. Поскольку единственное решение системы с квадратной матрицей существует тогда и только тогда, когда спектр этой матрицы не содержит нулевых значений, то в качестве области Ω целесообразно принять множество $\{\mathbb{C} \setminus 0\}$ (комплексная плоскость за исключением начала координат). Соответствующая интерпретация следствия 1 в этом случае примет вид:

Следствие 2. Для невырожденности исходной и возмущенной систем, заданных операторами F и \tilde{F} соответственно, достаточно выполнения

$$\gamma < \gamma^* = \frac{1}{1 + \mu(\tilde{F})},$$

где $\mu(\tilde{F}) < \infty$ – спектральное число обусловленности оператора \tilde{F} .

Для обоснования следствия 2 достаточно показать, что $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = \mu^{-1}(\tilde{F})$. Действительно, норма минимального возмущения оператора \tilde{F} , превращающего его в необратимый, есть $\sigma_{\min}(\tilde{F})$ [2]. При таком возмущении, обозначим его $\Delta\tilde{F}$, $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр касается начала координат. Следовательно, $\|\Delta\tilde{F}\| = \tilde{\varepsilon}_0\|\tilde{F}\| = \sigma_{\min}(\tilde{F})$, или $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = \mu^{-1}(\tilde{F})$.

В заключение теоретического изложения остановимся на вопросе исследования устойчивости стационарной линейной системы, динамика которой определяется оператором F . В рамках модельных представлений (2) имеют место две задачи. Первая: при известном операторе \tilde{F} сформировать требования на параметр γ , гарантирующие устойчивость невозмущенного оператора F . Вторая: по априорно известному значению γ оценить степень устойчивости невозмущенного оператора F , т.е. найти значение ε_0 . Решения данных задач с достаточностью раскрывают соотношения (5) и (6) соответственно. В качестве области локализации Ω тогда будут выступать множества $\Omega = \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ (левая комплексная полуплоскость) – в непрерывном случае и $\Omega = \{z : |z| \leq 1\}$ (комплексный круг единичного радиуса) – в дискретном.

Ниже рассматриваются два вычислительных примера. Первый представляет собой плохо обусловленную несимметричную спектральную задачу малой размерности. Второй носит прикладной характер и посвящен анализу устойчивости задачи определения околостационарных спутниковых орбит по наземным измерениям.

Численные эксперименты.

Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 \end{pmatrix},$$

входящую в стандартный пакет тестовых матриц (функция `gallery(5)`) вычислительной среды MatLab [4]. Данная матрица вырождена и кратность нулевого собственного значения равна 5 (для установления этого недостаточно удвоенной точности представления чисел $-\varepsilon_1 = 2^{-52}$; выполнение стандартной функции MatLab `eigs` – вычисления собственных чисел матрицы, приводит к неправильному результату – одному действительному и четырем комплексным характеристическим значениям). Интересно отметить и то, что неправильные собственные значения – результат выполнения функции `eigs`, подтверждаются построением псевдоспектра данной матрицы в оболочке EigTool [5] (Oxford University Computing Laboratory), также реализованной на удвоенной расчетной точности. Исследуем поведение спектра матрицы C при ее возмущении.

Предположим, что в результате размещения C в памяти ЭВМ каждый ее элемент получил аддитивно возмущение 2^{-52} (возмущенную таким образом матрицу обозначим \tilde{C}). Рассмотрим спектральные портреты матриц C и \tilde{C} , построенные в вычислительной среде с относительной точностью выполнения операций $\varepsilon_1 = 10^{-64}$, чтобы исключить влияние погрешностей вычислений. Необходимо отметить, что переход к высокой точности вычислений сопряжен со значительными временными затратами на построение спектральных портретов. Так, для построения рис. 1 потребовалось около суток расчетного времени (прямым методом построения псевдоспектра на регулярной сетке 1000×1000) на PC 2.4GHz.

Из рис. 1 видно, что ε -спектры матриц C и \tilde{C} существенно отличаются друг от друга. Если допустить, что \tilde{C} потенциально возможный образ C в вычислительной среде, то анализ его псевдоспектра (рис. 1, кривая 2) укажет на неверный вывод, – подтвердит результат выполнения функции `eigs(C)`.

Переходя к концепции гарантированных расчетов и учитывая, что относительная погрешность модельного возмущения матрицы C известна (если каждый элемент C получил возмущение 2^{-52} , то она может быть оценена), построим согласно (5) спектральный портрет \tilde{C} , с достаточностью содержащий ε -спектр матрицы C (при заданных значениях ε, γ). На рис. 1 он представлен кривой 3 (область вблизи оси абсцисс является областью сложных пересечений спектральных линий (кривая 1) и представлена на рис. 1 в упрощенном виде). Таким образом, гарантирующие заключения относительно спектра оператора C возможны только на основе анализа $\tilde{\varepsilon}$ -спектра его модельного приближения \tilde{C} . отождествление ε -спектра матрицы \tilde{C} с

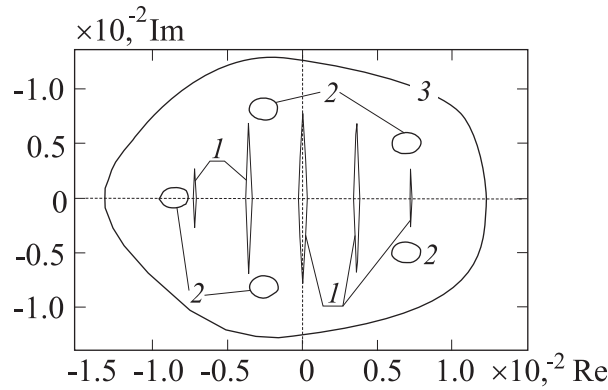


Рис. 1: Спектральные портреты матрицы C и \tilde{C} : 1 – псевдоспектр C при $\varepsilon = 10^{-21}$; 2 – псевдоспектр \tilde{C} при $\varepsilon = 10^{-21}$; 3 – псевдоспектр \tilde{C} при $\tilde{\varepsilon} = (\gamma + \varepsilon)/(1 - \gamma) \approx 1.19 \cdot 10^{-20}$, $\gamma \approx 1.09 \cdot 10^{-20}$, $\varepsilon = 10^{-21}$.

ε -спектром матрицы C может приводить к принципиально неправильным результатам.

Представленный пример показывает насколько важно учитывать погрешности погружения оператора в среду вычислений при построении его спектрального портрета. Пренебрежение даже достаточно малыми возмущениями может приводить к существенному искажению получаемых выводов (даже в случае задачи малой размерности).

Следующий пример посвящен прикладной проблеме, связанной с локализацией спектральных портретов операторов, – проблеме исследования устойчивости.

Рассмотрим задачу определения параметров орбиты квазистационарного искусственного спутника Земли по дальномерным измерениям с наземных пунктов наблюдения (НПН). Классическим подходом к решению таких нелинейных обратных задач является метод, основанный на их сведении к линейным, для которых алгоритмы решения более просты в реализации. Одной из существенных особенностей задачи определения околоstationарной орбиты, является возможность выбора в качестве опорной stationарной орбиты, что, в свою очередь, приводит к необходимости оценки параметров stationарной линейной системы типа „состояние-измерение”. Реализация последней задачи (задачи оценки параметров соответствующей stationарной линейной системы) осуществляется с использованием алгоритма винеровской фильтрации [6].

Образ оператора фильтра $F = A - KH$ (A – матрица динамической части системы; H – матрица наблюдения, а K – матрица передачи фильтра) в виртуальной среде аккумулирует в себе ошибки, накапливаемые в процессе его вычисления. Например, при нахождении матрицы передачи фильтра K требуется решение непрерывного алгебраического уравнения Риккати [6], которое для большинства прикладных задач может быть найдено лишь приближенно; кроме того, неточности связанные с выполнением матричных операций на ЭВМ также приносят свой вклад в суммарную вычислительную ошибку. Таким образом, точное уравнение, описывающие динамику фильтра при реализации алгоритма в вычислительной среде заменяется возмущенным с оператором $\tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{H}$, где \tilde{K} – матрица передачи фильтра вычисленная на ЭВМ; \tilde{A} , \tilde{H} – образы матриц A и H в вычислительной среде соответственно.

Пусть необходимо оценить устойчивость работы фильтра с оператором F на ос-

нове анализа его образа – \tilde{F} . В соответствии с (5), (6) необходимо найти значения $\tilde{\varepsilon}_0$, γ , и γ^* , проверить гарантирующее условие $\gamma < \gamma^*$ и вычислить согласно (6) значение ε_0 .

Значение $\tilde{\varepsilon}_0$ вычисляется в соответствии с определением псевдоспектра матрицы \tilde{F} ($\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр \tilde{F} касается мнимой оси); для вычисления ε_0 предварительно требуется найти значение γ . С этой целью обратимся к концепции построения численно-аналитических оценок накапливаемых погрешностей, преимущество которых заключается в том, что вывод результирующей оценки не требует априорного знания норм точных (невозмущенных) матриц – все необходимые числовые значения вычисляются в процессе решения конкретной прикладной задачи. Учитывая структуру матрицы F , ее возмущения будут аккумулировать возмущения матриц D , A , H , R (R , D – ковариационные матрицы ошибок измерений и фильтрации соответственно). Запишем модели возмущений этих матриц:

$$\begin{aligned} \|A - \tilde{A}\|_F &\leq \varepsilon_A \|A\|_F, \quad \|D - \tilde{D}\|_F \leq \varepsilon_D \|D\|_F, \\ \|H - \tilde{H}\|_F &\leq \varepsilon_H \|H\|_F, \quad \|R^{-1} - \tilde{R}^{-1}\|_F \leq \varepsilon_R \|R^{-1}\|_F, \end{aligned} \quad (7)$$

где возмущенные операторы отмечены "тильдой"; $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма матрицы.

В соответствии с изложенным выше, представим \tilde{F} и \tilde{K} в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \left(\tilde{A} - \left(\tilde{K} \tilde{H} \right)_c \right)_c \\ \tilde{K} &= \left(\left(\tilde{D} \tilde{H}^T \right)_c \tilde{R}^{-1} \right)_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где $(\cdot)_c$ – результат выполнения вычислений на компьютере.

Тогда, следуя представлениям, изложенным в работе [2], получаем оценки норм погрешностей соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \|F - \tilde{F}\| &\leq \|F - \tilde{F}\|_F \leq J_F, \\ J_F &= \frac{\varepsilon_H + m\varepsilon_1}{(1 - \varepsilon_H) \left(1 - \frac{m-1}{2} \varepsilon_1 \right)} \left\| \tilde{K} \right\|_F \left\| \tilde{H} \right\|_F + J_K \left\| \tilde{H} \right\|_F + \frac{\varepsilon_A}{1 - \varepsilon_A} \left\| \tilde{A} \right\|_F + \\ &+ \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \left\| \tilde{F} \right\|_F, \\ \|K - \tilde{K}\|_F &\leq J_K, \\ J_K &= \frac{[\varepsilon_D + (n+m)\varepsilon_1 + \varepsilon_R + \varepsilon_H] \left\| \tilde{D} \right\|_F \left\| \tilde{H} \right\|_F \left\| \tilde{R}^{-1} \right\|_F}{(1 - \varepsilon_H)(1 - \varepsilon_R)(1 - \varepsilon_D) \left(1 - \frac{n-1}{2} \varepsilon_1 \right) \left(1 - \frac{m-1}{2} \varepsilon_1 \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

где ε_1 – относительная точность представления чисел в ЭВМ (например, при вычислениях с удвоенной точностью $\varepsilon_1 = 2^{-52}$), а m , n – размерности пространства параметров состояния системы и вектора измерений соответственно.

Переход к численно-аналитической форме представления выражения (9) осуществляется заменой выражений для $\left\| \tilde{D} \right\|_F$, $\left\| \tilde{H} \right\|_F$, $\left\| \tilde{R}^{-1} \right\|_F$, $\left\| \tilde{A} \right\|_F$ их вычисленными на ЭВМ значениями:

$$\begin{aligned} \|\tilde{D}\|_F &\leq \frac{\|\tilde{D}\|_F^c}{1 - \varepsilon_F(D)}, \|\tilde{H}\|_F \leq \frac{\|\tilde{H}\|_F^c}{1 - \varepsilon_F(H)}, \\ \|\tilde{R}^{-1}\|_F &\leq \frac{\|\tilde{R}^{-1}\|_F^c}{1 - \varepsilon_F(R)}, \|\tilde{A}\|_F \leq \frac{\|\tilde{A}\|_F^c}{1 - \varepsilon_F(A)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\varepsilon_F(\cdot)$ – относительная погрешность вычисления фробениусовой нормы матрицы (определяется размерностью соответствующей матрицы и точностью вычислений ε_1 [2]); $\|\cdot\|_F^c$ – результат вычисления нормы на ЭВМ.

В качестве оценки γ , с учетом (9) и (10), можно принять следующее

$$\frac{J_F}{\|F\|} \leq \frac{\sqrt{m}J_F}{\|\tilde{F}\|_F - J_F} \leq \frac{\sqrt{m}(1 + \varepsilon_F(F))J_F}{\|\tilde{F}\|_F^c - J_F(1 + \varepsilon_F(F))} = \gamma.$$

Числовое значение параметра J_F находят в процессе решения конкретной задачи, вычисляя необходимые величины $\|\tilde{D}\|_F^c, \|\tilde{H}\|_F^c, \|\tilde{R}^{-1}\|_F^c, \|\tilde{A}\|_F^c$ на ЭВМ.

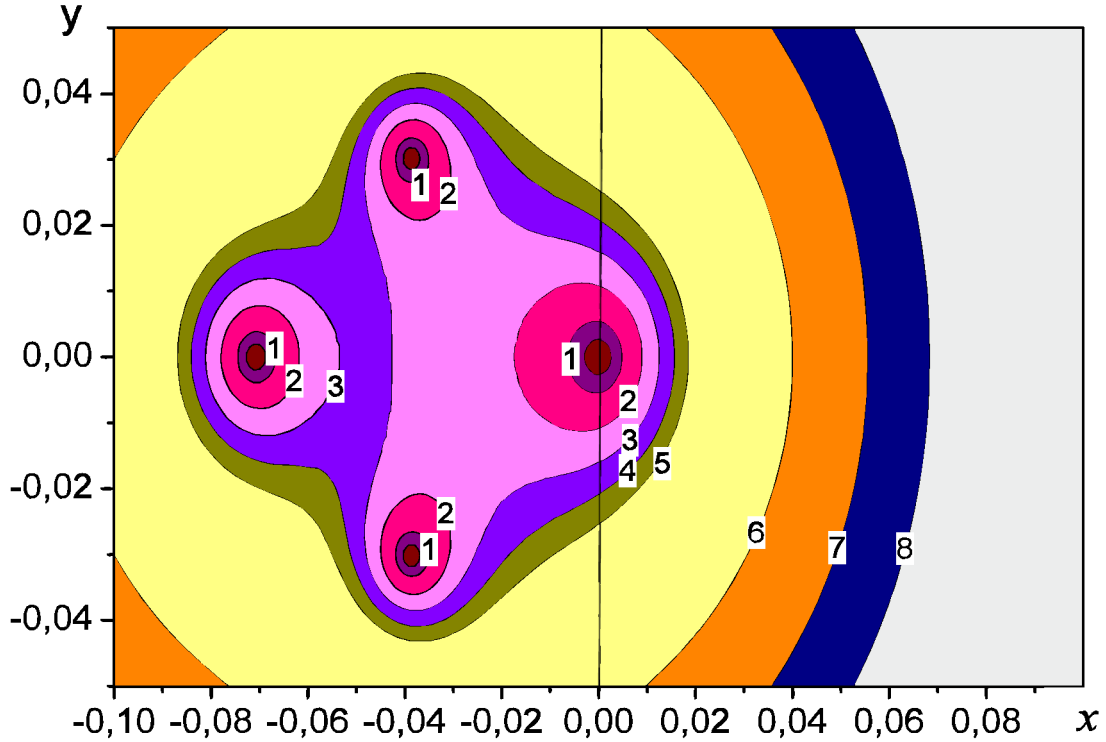


Рис. 2: Типичный фрагмент спектрального портрета оператора \tilde{F} : $1 - \tilde{\varepsilon} = 1.0 \cdot 10^{-5}$; $2 - \tilde{\varepsilon} = 3.0 \cdot 10^{-5}$; $3 - \tilde{\varepsilon} = 5.0 \cdot 10^{-5}$; $4 - \tilde{\varepsilon} = 7.0 \cdot 10^{-5}$; $5 - \tilde{\varepsilon} = 9.0 \cdot 10^{-5}$; $6 - \tilde{\varepsilon} = 1.0 \cdot 10^{-4}$; $7 - \tilde{\varepsilon} = 3.0 \cdot 10^{-4}$; $8 - \tilde{\varepsilon} = 5.0 \cdot 10^{-4}$.

Будем рассматривать задачу определения параметров околоstationарной орбиты по дальномерным измерениям от трех неподвижных наземных пунктов наблюдения. Расположение пунктов наблюдения характеризуется значениями долготы (λ), широты (ϕ) и радиуса ($\rho = 6371$ км); координаты stationарной точки, около которой рассматривается орбитальное движение, взяты равными $\lambda = \phi = 0, \rho = 42216$ км,

Таблица 1: Характеристики устойчивости операторов F и \tilde{F}

#	Координаты НПП., град.						$\tilde{\varepsilon}_0$	ε_0	γ	γ^*
	λ_1	ϕ_1	λ_2	ϕ_2	λ_3	ϕ_3				
1	0.1	0	-0.1	0	0	0.1	$8.37 \cdot 10^{-6}$	$8.32 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-8}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$
2	0.5	0	-0.5	0	0	0.5	$4.339 \cdot 10^{-5}$	$4.334 \cdot 10^{-5}$	$5.3 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$
3	1	0	-1	0	0	1	$8.686 \cdot 10^{-5}$	$8.681 \cdot 10^{-5}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$
4	5	0	-5	0	0	5	$4.333 \cdot 10^{-4}$	$4.332 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$
5	20	0	-20	0	0	20	$1.676 \cdot 10^{-3}$	$1.675 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
6	10	10	-10	10	0	10	$2.28 \cdot 10^{-6}$	$2.22 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
7	10	0	10	-10	10	10	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$

а основные параметры имитируемой орбиты – эксцентриситет $e = 10^{-4}$ и наклонение $i = 0.5^\circ$; матрицы интенсивностей ошибок измерений и возмущений в динамической части системы полагались равными $R = \text{diag}(10^4, 10^4, 10^4) \text{ м}^2$ и $Q = \text{diag}(10^{-4} \text{ м}^2, 10^{-4} \text{ м}^2, 10^{-4} \text{ м}^2, 5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2, 5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2, 5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2)$ соответственно; кроме того, принималось, что возмущения имеют только вычислительную природу, так что $\varepsilon_A = \varepsilon_H = \varepsilon_R = \varepsilon_1 \approx 2.2 \times 10^{-16}$, причем ε_D оценивалось по ширине полосы колебаний численного (с удвоенной точностью) решения дифференциального уравнения Риккати при больших значениях времени.

На рис. 2 представлен фрагмент псевдоспектра оператора \tilde{F} , соответствующий конфигурации наземных пунктов # 1 в таблице 1.

Анализ представленных в таблице результатов показывает, что устойчивость винеровского фильтра к возмущениям возрастает по мере увеличения угловых расстояний между НПП (наблюдается увеличение отношения γ/γ^*). Наиболее благоприятными при этом являются ситуации, когда текущая конфигурация НПП образует максимальный телесный угол, что в свою очередь актуализирует самостоятельную проблему поиска оптимальной конфигурации НПП при заданных ограничениях на их географическое расположение, которая требует дополнительного исследования.

В заключение отметим основные результаты работы. Представленные достаточные условия вложенности спектральных портретов операторов позволяют решать задачи гарантированной локализации спектров и/или спектральных портретов операторов для которых известно лишь их некоторое приближение. Рассмотренные численные примеры – задача гарантированной локализации спектра плохо обусловленной матрицы и исследование устойчивости функционирования винеровского фильтра при определении орбиты околостационарного спутника по измерениям, подтверждают целесообразность использования предлагаемого подхода при решении практических задач гарантированной численной локализации спектров операторов и его потенциальную востребованность во всех теоретических и прикладных областях в которых требуется решение задачи оценки близости расположения спектра к заданной границе.

Список литературы

- [1] Годунов С.К., Кирилук О.П., Костин В.И. Спектральные портреты матриц. Новосибирск, 1990. (Препр. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 20 с.)

- [2] МАЛЫШЕВ А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991. 229 с.
- [3] ДЕВЯТИСИЛЬНЫЙ А.С., КИСЛОВ Д.Е. Устойчивость динамических алгоритмов определения орбит квазистационарных ИСЗ // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 2. С. 138–143.
- [4] HIGHAM N.J. The test matrix toolbox for MatLab (version 3.0) // Numerical Analysis Report, 1995. # 276.
- [5] WRIGHT T.G. <http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/eigtool/>
- [6] КАЛМАН Р., ФАЛЬ П., АРБИВ М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.